CHAPITRE 8 : *Propagation d'un signal*

En physique, on regroupe sous l'appellation signal toute information dépendant du temps et/ou de l'espace. Cette double dépendance sous-entend qu'un signal est susceptible de se déplacer dans l'espace et dans le temps. Ce chapitre décrit quelques-unes des propriétés de la propagation de ces signaux, dans le cas où ceux-ci sont assimilables à des ondes.

1. Définitions

1.1. Perturbation mécanique

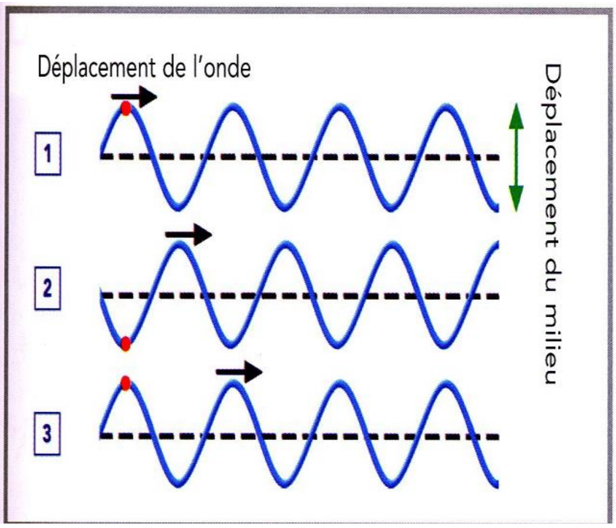
Une perturbation mécanique est une modification d'un milieu naturel. Une vibration qui se déplace le long d'une corde initialement tendue, la chute d'une pierre dans un lac qui provoque des cercles concentriques sont deux exemples de perturbations.

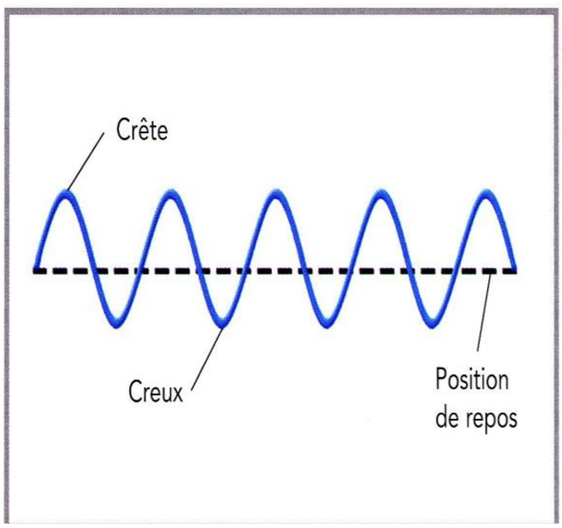
1.2. Propagation d'une onde

On appelle propagation d'une onde mécanique, le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière. Cette perturbation modifie temporairement ses propriétés mécaniques (vitesse, position, énergie).

1.3. Onde transversale

Une onde est dite transversale lorsque le déplacement des points du milieu de propagation s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation.

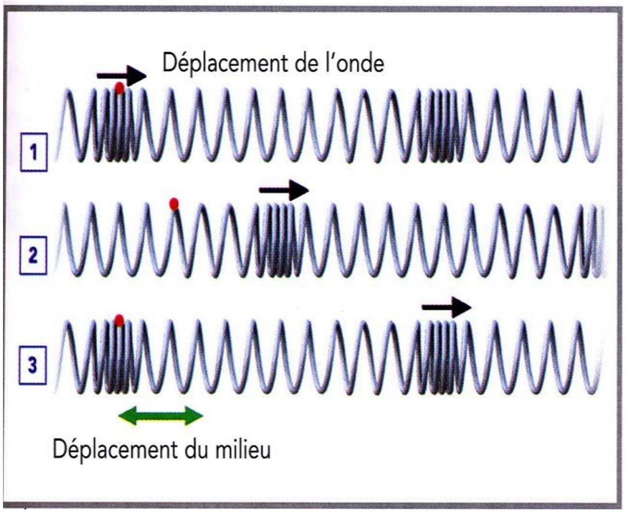


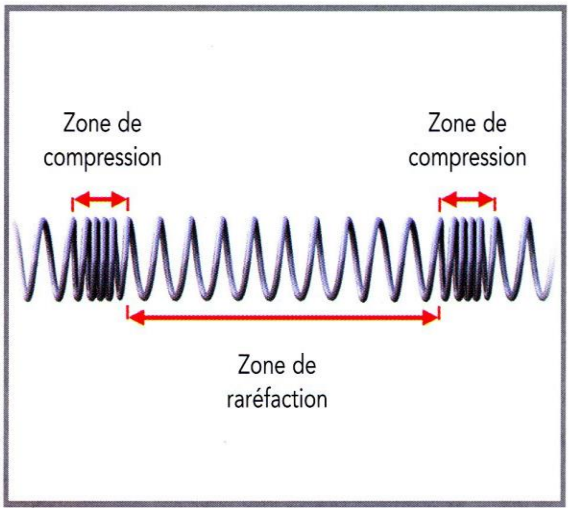


- L'onde se propage de gauche à droite, tandis que le milieu (par exemple, le point) se déplace de bas en haut. L'onde est transversale.
- Une onde transversale est formée de crêtes et de creux.

1.4. Onde longitudinale

Une onde est dite longitudinale lorsque le déplacement des points du milieu de propagation s'effectue dans la même direction que celle de la propagation.





- Au passage d'une onde longitudinale, le milieu (par exemple, le point) se déplace parallèlement à la propagation de l'onde.
- Une onde longitudinale est formée de zones de compression et de zones de raréfaction.

1.5. Onde progressive

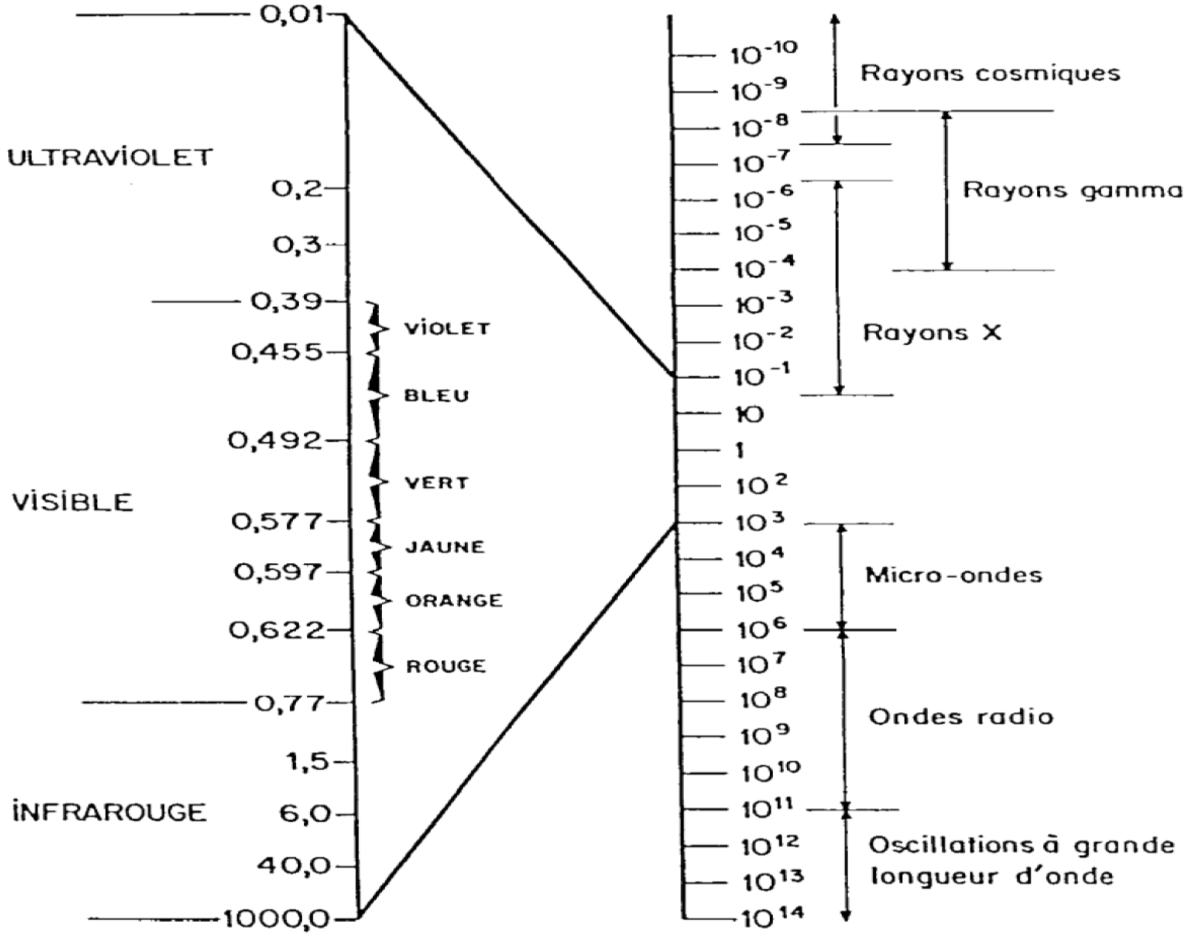
Une onde est dite progressive lorsque la perturbation se propage dans le milieu de propagation sans se déformer.

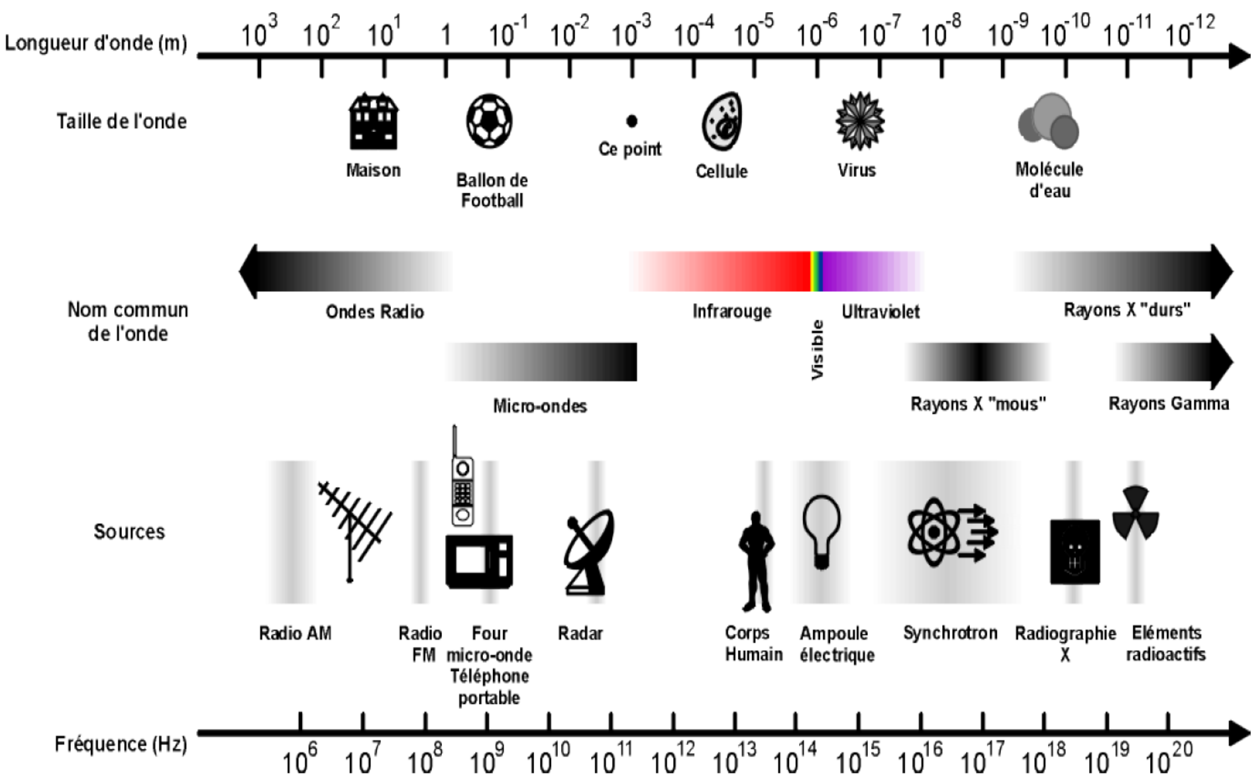
1.6. Onde et signaux physiques

On appelle onde, un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation est appelée signal physique transporté par l'onde.

Type d'onde	Milieu de propagation	Signaux physiques
Ondes élastiques	solide	Déplacement transversal ou longitudinal
Ondes sonores	fluide	Suppression acoustique vitesse (longitudinale)
Ondes électromagnétiques	Vide	Champ électrique Champ magnétique
Ondes de courant	Câble de transmission	Tension électrique Intensité électrique
Ondes gravitationnelles	vide	Déformation de l'espace

Vue d'ensemble des ondes électromagnétiques (longueurs d'ondes en µm)





2. Notion de spectre

Le signal d'une onde n'est en général sinusoïdal. Cependant, une théorie mathématique due à Joseph Fourier, mathématicien et physicien du début de 19ème siècle, montre que tout signal réalisable en pratique peut être décomposé en somme de signaux sinusoïdaux.

2.1. Analyse spectrale

L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné est appelée **analyse spectrale**. Le résultat de l'analyse spectrale est :

- la liste des fréquences f_i des composantes sinusoidales contenues dans le signal
- l'amplitude A_i de chaque composante sinusoidale de frequence f_i
- la phase initiale φ_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i.

Ces informations permettent de savoir que le signal s'écrit :

$$\boxed{s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)}$$

Chaque signal sinusoïdal $s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ est une composante sinusoidale du signal $s(t)$. On dit que le signal $s(t)$ contient les fréquences f_i. Le spectre du signal est l'ensemble des frequences contenues dans le signal.

2.2. Représentation graphique du spectre

- La représentation graphique des A_i en fonction des f_i constitue le spectre d'amplitude. Elle permet de visualiser le contenu frequentiel du signal.
- On préfère parfois représenter les carrés des amplitudes A_i^2 en fonction des fréquences f_i pour visualiser la contribution de chaque composante à l'énergie du signal, c'est le spectre d'énergie.
- La représentation des phases initiales φ_i en fonction des f_i est **le spectre de phase**. Ce spectre est plus difficilement interprétable car les phases initiales, à la différence des amplitudes dépendent du choix de l'origine des temps qui est arbitraire.

2.3. Synthèse de Fourier

Toute l'information que l'on peut avoir sur un signal est contenue dans les spectres d'amplitude (ou énergie) et de phase. L'opération consistant à reconstituer un signal $s(t)$ dont on connaît le spectre (fréquence f_i, amplitude A_i et phases initiales φ_i) par la formule de $s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ est appelée **synthèse de Fourier**.

3. Cas d'un signal périodique de forme quelconque

3.1. Analyse spectrale d'un signal périodique

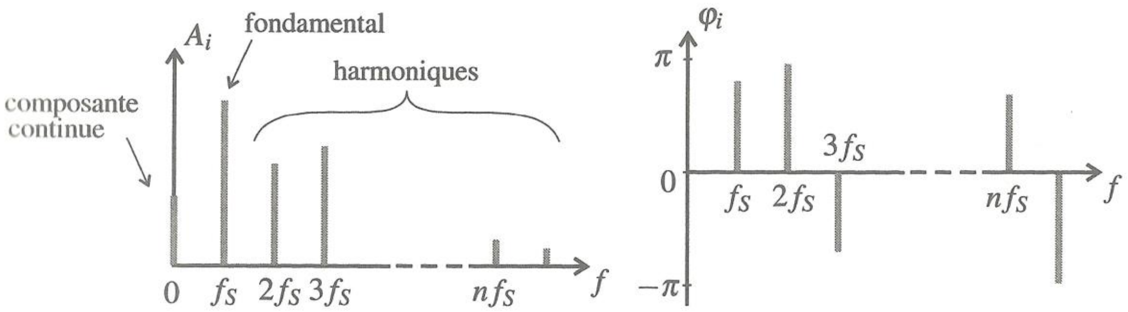
Tout signal périodique de fréquence f_S et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_S : 0, f_S, $2f_S$,….., nf_S…. Il peut s'écrire sous la forme d'un développement en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes

- A_0 est appelée **composante continue**, c'est la moyenne du signal qui est la plupart du temps nulle dans le cas d'une onde ;
- la composante sinusoïdale $A_1 \cos(2\pi f_S t + \varphi_1)$ qui a la même fréquence f_S que le signal $s(t)$ est appelée **fondamental**.
- la composante sinusoïdale $A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$ qui a une fréquence n fois plus élevée que la fréquence du signal, avec $n \geq 2$, est appelée harmonique de rang n.

Remarque : le spectre d'un signal sinusoïdal ne comporte qu'un fondamental.



4. Cas d'un signal non périodique

La décomposition d'un signal non périodique s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)\, d\omega$$

$A(\omega)$ est la densité spectrale d'amplitude qui a la dimension du signal $s(t)$ divisée par l'unité de pulsation, c'est à dire multipliée par des secondes.

5. Phénomènes de propagation

5.1. Onde progressive

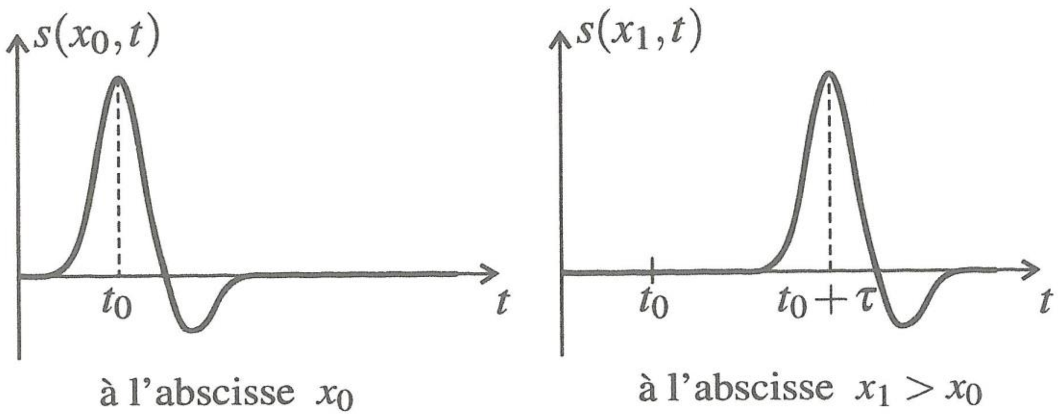
5.1.1. Vitesse de propagation ou célérité

La vitesse de déplacement de la perturbation est appelée vitesse de propagation ou encore célérité. On la note c.

Pour modéliser le phénomène de propagation on introduit l'onde progressive à une dimension qui se propage sans atténuation ni déformation à la vitesse constante c dans la direction d'un axe (Ox). Cette onde representée mathematiquement par une fonction $s(x,t)$ de variables : la coordonnée x selon (Ox) et le temps t. $s(x,t)$ est la valeur du signal, mesuré à l'abscisse x, à l'instant t. On considere le cas où l'onde progresse dans le sens positif de (Ox) et le cas où elle progresse dans le sens négatif de (Ox).

5.1.2.1ère expression de l'onde progressive

On considère une onde progressive se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens positif de cet axe, c'est-à-dire vers les x croissants. La figure suivante représente le signal mesuré à une abscisse x_0, en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré à une abscisse $x_1 > x_0$



Les valeurs observées en x_0 au cours du temps sont observées aussi en x_1 mais avec un retard τ. Ceci s'ecrit par :

$$s(x_1,t) = s(x_0, t-\tau)$$

La durée τ est celle qu'il faut à l'onde pour se propager de x_0 à x_1. La vitesse de propagation étant c, on a :

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Il vient donc

$$s(x_1,t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right)$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi quand $x_1 < x_0$. Elle s'ecrit en effet :

$$s(x_1,t) = s\left(x_0, t + \frac{x_0 - x_1}{c}\right)$$

et signifie alors que l'on trouve en x_1 le même signal qu'en x_0 avec une avance de

$$\frac{x_0 - x_1}{c}$$

Si on écrit $s(x_1, t)$ en posant $x_0 = 0$ et $x_1 = x$, valeur quelconque, on trouve

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $t - x/c$. Pour simplifier on le note $f(t - x/c)$.

- Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens positif de cet axe, sans attenuation, ni deformation est de la forme mathematique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}}$$

où f est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

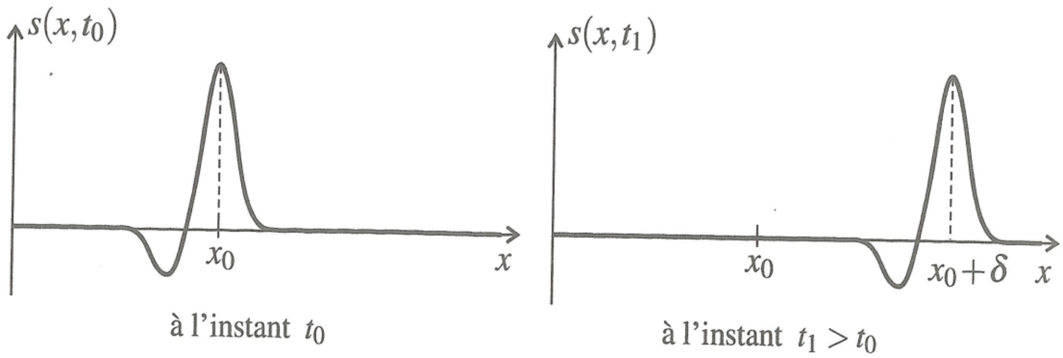
- Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation, ni déformation est de la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)}}$$

où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

5.1.3. 2ème expression de l'onde progressive

La figure suivante représente les valeurs du signal à deux instants différents t_0 et $t_1 > t_0$ pour la même onde que sur la figure précédente.



Entre les instants t_0 et t_1, l'onde qui progresse dans le sens positif de l'axe (Ox) se déplace d'une distance δ. Ainsi la valeur observée à l'instant t_0 en x est observée à l'instant t_1 en $x + \delta$:

$$\boxed{\boldsymbol{s(x, t_0)} = \boldsymbol{s}(x + \delta, \boldsymbol{t_1})}$$

L'onde se propage à la vitesse c donc on a :

$$\delta = c(t_1 - t_0)$$

Il vient ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t_0) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1)}}$$

Elle est aussi valable si $t_1 < t_0$.

Si l'on écrit en posant $t_0 = t$, instant quelconque et $t_1 = 0$, elle devient alors

$$s(x,t) = s(x - ct, 0)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $x - ct$. Pour simplifier l'écriture, on le note $F(x - ct)$.

- Ainsi une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens positif de cet axe, sans atténuation, ni déformation est de la forme mathématique suivante :

  $$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = F(x - ct)}}$$

  où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

- Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation, ni déformation est de la forme mathématique suivante :

  $$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = G(x + ct)}}$$

  où G est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

5.1.4.Equivalence des deux expressions

Une onde se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens positif peut s'écrire de deux manières :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct)$$

Si l'on connaît la fonction f, on trouve la fonction F en posant $t = 0$ dans l'equation ci-dessus :

$$F(x) = f\left(-\frac{x}{c}\right)$$

Si l'on connaît la fonction F, on trouve la fonction f en posant $x = 0$ dans l'équation ci-dessus :

$$f(t) = F(-ct)$$

Dans le cas d'une onde se propageant à la vitesse c dans la direction (Ox) dans le sens négatif, on obtient la même onde avec les deux formules $g(t + x/c)$ et $G(x + ct)$ si

$$G(x) = g\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{soit} \quad g(t) = G(ct)$$

5.2. Onde progressive sinusoïdale

5.2.1.Définition

On parle d'onde sinusoïdale ou encore d'onde harmonique lorsque le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω, independante du point. Une telle onde a la forme mathematique suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = A(x)\cos\big(\omega t + \varphi(x)\big)}}$$

$A(x)$ est l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x et $\varphi(x)$ la phase initiale de l'onde en même point. On note $A_0 = A(0)$ et $\varphi(0) = \varphi_0$, l'amplitude et la phase initiale à l'origine O de l'axe (Ox).

5.2.2.Double périodicité spatio-temporelle

L'onde se propageant sans atténuation, ni déformation dans le sens positif de l'axe (Ox), la vibration observée à toute abscisse $x > 0$ reproduit la vibration observée en $x = 0$ avec le retard de propagation $\tau = x/c$. Ceci s'exprime ainsi :

$$s(x,t) = s(0,t-\tau) = A_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)$$

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) avec la vitesse c a pour expression :

$$s(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec $k = \omega/c$.

k est appelé vecteur d'onde. A_0 est l'amplitude de l'onde et φ_0 sa phase initiale à l'origine.

Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

- du temps (pour x fixé) avec une pulsation temporelle ω,
- de la variable spatiale (pour t fixé), avec une pulsation spatiale k.

On parle de la **double périodicité spatio-temporelle** de l'onde.

La période temporelle est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La période spatiale est **la longueur d'onde :**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$$

La fréquence spatiale est **le nombre d'onde :**

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut s'ecrire :

$$s(x,t) = A_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

où T est la période temporelle et λ la période spatiale appelée longueur d'onde.

La longueur d'onde est égale à la distance sur laquelle l'onde se propage pendant une durée égale à la période temporelle T :

$$\lambda = cT$$

On peut trouver toutes les grandeurs relatives à la périodicité spatio-temporelle quand on connaît l'une d'entre elles et la vitesse de propagation c. Si on connaît la période temporelle T alors :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad f = \frac{1}{T}, \quad \lambda = cT, \qquad \sigma = \frac{1}{cT}$$

Si on connaît la fréquence f :

$$\omega = 2\pi f, \qquad T = \frac{1}{f}, \quad \lambda = c\frac{1}{f}, \qquad \sigma = \frac{f}{c}$$

Si on connaît la longueur d'onde λ :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}, \qquad T = \frac{\lambda}{c}, \quad f = \frac{c}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Les grandeurs relatives à la double périodicité temporelle de l'onde progressive sinusoïdale sont rassemblées dans le tableau suivant :

	Période	**Fréquence**	**Pulsation**
Temps	T	f	ω
Espace	λ	σ	k

5.2.3.Déphasage entre les vibrations en deux points

La phase initiale de la vibration à l'abscisse x est d'après l'équation de $s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$:

$$\varphi(x) = \varphi_0 - kx = \varphi_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Les signaux d'une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) en deux points d'abscisses x_1 et x_0 sont dephasés de :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0)}}$$

Ce résultat se retrouve très facilement. Si $x_1 > x_0$, la vibration en x_1 est en retard sur celle en x_0 de

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Le retard temporel se traduit par un retard de phase :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = -2\pi\frac{\tau}{T} = -\frac{2\pi}{cT}(x_1 - x_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0)$$

A quelle condition les vibrations en deux points d'abscisses x_0 et x_1 sont-elles en phase ? Cela signifie que $\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = m \times 2\pi$ où m est un entier relatif, soit

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0) = m \times 2\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{x_1 - x_0 = m\lambda}}$$

De même, les vibrations en ces deux points sont en opposition de phase si $\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = \pi + m \times 2\pi$ où m est un entier relatif, soit si :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0) = \pi + m \times 2\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{x_1 - x_0 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}}$$

- **Deux points en lesquels l'onde est en phase sont séparés le long de la direction de propagation $(\boldsymbol{Ox})$ d'un nombre entier de fois la longueur d'onde.**
- **Deux points en lesquels l'onde est en opposition de phase sont séparés le long de la direction de propagation $(\boldsymbol{Ox})$ d'un nombre entier de fois la longueur d'onde plus une demi-longueur d'onde.**